> **Notación para raíces**
>
> Si n es número par y $a \geq 0$, el símbolo $\sqrt[n]{a}$ denota la raíz n-ésima no negativa de a. Cuando n es impar, sólo existe una raíz n-ésima real de a, denotada por el símbolo $\sqrt[n]{a}$. Por lo tanto, $\sqrt[4]{16} = 2$, $\sqrt[3]{27} = 3$, y $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Esto se deduce de la propiedad $|a||b| = |ab|$.

¿La operación de elevar al cuadrado preserva las desigualdades? En general, la respuesta es no. Por ejemplo, $-3 < 2$, pero $(-3)^2 > 2^2$. Por otra parte, $2 < 3$ y $2^2 < 3^2$. Si tratamos con números no negativos, entonces $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$. Una variante útil de esto (véase el problema 63) es

$$\boxed{|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2}$$

EJEMPLO 14 Resuelva la desigualdad $|3x + 1| < 2|x - 6|$.

SOLUCIÓN Esta desigualdad es más difícil de resolver que nuestros ejemplos anteriores, debido a que hay dos signos de valor absoluto. Podemos eliminar ambos al usar el resultado del último recuadro.

$$\begin{aligned} |3x + 1| < 2|x - 6| &\Leftrightarrow |3x + 1| < |2x - 12| \\ &\Leftrightarrow (3x + 1)^2 < (2x - 12)^2 \\ &\Leftrightarrow 9x^2 + 6x + 1 < 4x^2 - 48x + 144 \\ &\Leftrightarrow 5x^2 + 54x - 143 < 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 13)(5x - 11) < 0 \end{aligned}$$

Los puntos de separación para esta desigualdad cuadrática son -13 y $\frac{11}{5}$; estos puntos dividen la recta real en tres intervalos $(-\infty, -13)$, $\left(-13, \frac{11}{5}\right)$, y $\left(\frac{11}{5}, \infty\right)$. Cuando utilizamos los puntos de prueba -14, 0 y 3, descubrimos que sólo los puntos en $\left(-13, \frac{11}{5}\right)$ satisfacen la desigualdad. ■

Revisión de conceptos

1. El conjunto $\{x: -1 \leq x < 5\}$ se escribe en notación de intervalos como _______ y el conjunto $\{x: x \leq -2\}$ se escribe como _______.

2. Si $a/b < 0$, entonces $a < 0$ y _______ o bien $a > 0$ y _______.

3. ¿Cuáles de las ecuaciones siguientes siempre son verdaderas?

(a) $|-x| = x$ (b) $|x|^2 = x^2$

(c) $|xy| = |x||y|$ (d) $\sqrt{x^2} = x$

4. La desigualdad $|x - 2| \leq 3$ es equivalente

a _______ $\leq x \leq$ _______.

Conjunto de problemas 0.2

1. Muestre cada uno de los intervalos siguientes en la recta real.

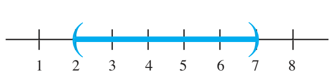
(a) $[-1, 1]$ (b) $(-4, 1]$

(c) $(-4, 1)$ (d) $[1, 4]$

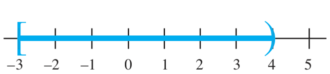
(e) $[-1, \infty)$ (f) $(-\infty, 0]$

2. Utilice la notación del problema 1 para describir los intervalos siguientes.

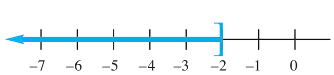
(a)



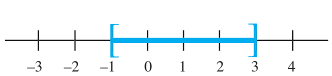
(b)



(c)



(d)



En cada problema del 3 al 26 exprese el conjunto solución de la desigualdad dada en notación de intervalos y bosqueje su gráfica.

3. $x - 7 < 2x - 5$ **4.** $3x - 5 < 4x - 6$

5. $7x - 2 \leq 9x + 3$ **6.** $5x - 3 > 6x - 4$

7. $-4 < 3x + 2 < 5$ **8.** $-3 < 4x - 9 < 11$

9. $-3 < 1 - 6x \leq 4$ **10.** $4 < 5 - 3x < 7$

11. $x^2 + 2x - 12 < 0$ **12.** $x^2 - 5x - 6 > 0$

13. $2x^2 + 5x - 3 > 0$ **14.** $4x^2 - 5x - 6 < 0$

15. $\dfrac{x + 4}{x - 3} \leq 0$ **16.** $\dfrac{3x - 2}{x - 1} \geq 0$

17. $\dfrac{2}{x} < 5$ **18.** $\dfrac{7}{4x} \leq 7$

19. $\dfrac{1}{3x - 2} \leq 4$ **20.** $\dfrac{3}{x + 5} > 2$

21. $(x + 2)(x - 1)(x - 3) > 0$

22. $(2x + 3)(3x - 1)(x - 2) < 0$

23. $(2x - 3)(x - 1)^2(x - 3) \geq 0$

24. $(2x - 3)(x - 1)^2(x - 3) > 0$

25. $x^3 - 5x^2 - 6x < 0$ **26.** $x^3 - x^2 - x + 1 > 0$

27. Indique si cada una de las proposiciones siguientes es verdadera o falsa.

(a) $-3 < -7$ (b) $-1 > -17$ (c) $-3 < -\frac{22}{7}$

28. Indique si cada una de las proposiciones siguientes es verdadera o falsa.

(a) $-5 > -\sqrt{26}$ (b) $\frac{6}{7} < \frac{34}{39}$ (c) $-\frac{5}{7} < -\frac{44}{59}$

29. Suponga que $a > 0, b > 0$. Demuestre cada proposición. *Sugerencia:* cada parte requiere de dos demostraciones: una para $\Rightarrow$ y otra para $\Leftarrow$.

(a) $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ (b) $a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

30. Si $a \leq b$, ¿cuáles de las proposiciones siguientes son verdaderas?

(a) $a^2 \leq ab$ (b) $a - 3 \leq b - 3$

(c) $a^3 \leq a^2b$ (d) $-a \leq -b$

31. Encuentre todos los valores de x que satisfagan, de manera simultánea, ambas desigualdades.

(a) $3x + 7 > 1$ y $2x + 1 < 3$

(b) $3x + 7 > 1$ y $2x + 1 > -4$

(c) $3x + 7 > 1$ y $2x + 1 < -4$

32. Encuentre todos los valores de x que satisfacen al menos una de las dos desigualdades.

(a) $2x - 7 > 1$ o bien $2x + 1 < 3$

(b) $2x - 7 \leq 1$ o bien $2x + 1 < 3$

(c) $2x - 7 \leq 1$ o bien $2x + 1 > 3$

33. Resuelva para x, exprese su respuesta en notación de intervalos.

(a) $(x + 1)(x^2 + 2x - 7) \geq x^2 - 1$

(b) $x^4 - 2x^2 \geq 8$

(c) $(x^2 + 1)^2 - 7(x^2 + 1) + 10 < 0$

34. Resuelva cada desigualdad. Exprese su solución en notación de intervalos.

(a) $1.99 < \frac{1}{x} < 2.01$ (b) $2.99 < \frac{1}{x + 2} < 3.01$

En los problemas del 35 al 44 determine los conjuntos solución de las desigualdades dadas.

35. $|x - 2| \geq 5$ **36.** $|x + 2| < 1$

37. $|4x + 5| \leq 10$ **38.** $|2x - 1| > 2$

39. $\left|\frac{2x}{7} - 5\right| \geq 7$ **40.** $\left|\frac{x}{4} + 1\right| < 1$

41. $|5x - 6| > 1$ **42.** $|2x - 7| > 3$

43. $\left|\frac{1}{x} - 3\right| > 6$ **44.** $\left|2 + \frac{5}{x}\right| > 1$

En los problemas del 45 al 48 resuelva la desigualdad cuadrática por medio de la fórmula cuadrática.

45. $x^2 - 3x - 4 \geq 0$ **46.** $x^2 - 4x + 4 \leq 0$

47. $3x^2 + 17x - 6 > 0$ **48.** $14x^2 + 11x - 15 \leq 0$

En los problemas 49 al 52 muestre que la implicación indicada es verdadera.

49. $|x - 3| < 0.5 \Rightarrow |5x - 15| < 2.5$

50. $|x + 2| < 0.3 \Rightarrow |4x + 8| < 1.2$

51. $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{6} \Rightarrow |6x - 12| < \varepsilon$

52. $|x + 4| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |2x + 8| < \varepsilon$

En los problemas del 53 al 56 determine δ (dependiente de ε) de modo que la implicación dada sea verdadera.

53. $|x - 5| < \delta \Rightarrow |3x - 15| < \varepsilon$

54. $|x - 2| < \delta \Rightarrow |4x - 8| < \varepsilon$

55. $|x + 6| < \delta \Rightarrow |6x + 36| < \varepsilon$

56. $|x + 5| < \delta \Rightarrow |5x + 25| < \varepsilon$

57. En un torno, usted desea fabricar un disco (cilindro circular recto delgado) con circunferencia de 10 pulgadas. Esto se realiza midiendo de manera continua el diámetro conforme se hace el disco más pequeño. ¿Qué tan exacto debe medir el diámetro si puede tolerar un error de, a lo sumo, 0.02 pulgadas en la circunferencia?

58. Las temperaturas Fahrenheit y las temperaturas Celsius están relacionadas por la fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Un experimento requiere mantener una solución a 50°C con un error de 3% (o 1.5°), a lo sumo. Usted sólo tiene un termómetro Fahrenheit. ¿Qué error se le permite en el experimento?

En los problemas del 59 al 62 resuelva las desigualdades.

59. $|x - 1| < 2|x - 3|$ **60.** $|2x - 1| \geq |x + 1|$

61. $2|2x - 3| < |x + 10|$ **62.** $|3x - 1| < 2|x + 6|$

63. Demuestre que $|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2$ dando una razón para cada uno de los siguientes pasos.

$$|x| < |y| \Rightarrow |x||x| \leq |x||y| \quad \text{y} \quad |x||y| < |y||y|$$
$$\Rightarrow |x|^2 < |y|^2$$
$$\Rightarrow x^2 < y^2$$

Recíprocamente,

$$x^2 < y^2 \Rightarrow |x|^2 < |y|^2$$
$$\Rightarrow |x|^2 - |y|^2 < 0$$
$$\Rightarrow (|x| - |y|)(|x| + |y|) < 0$$
$$\Rightarrow |x| - |y| < 0$$
$$\Rightarrow |x| < |y|$$

64. Utilice el resultado del problema 63 para demostrar que

$$0 < a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

65. Utilice las propiedades del valor absoluto para demostrar que cada una de las siguientes proposiciones son verdaderas.

(a) $|a - b| \leq |a| + |b|$ (b) $|a - b| \geq |a| - |b|$

(c) $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$

66. Utilice la desigualdad del triángulo y el hecho de que $0 < |a| < |b| \Rightarrow 1/|b| < 1/|a|$, para establecer la siguiente cadena de desigualdades.

$$\left|\frac{1}{x^2 + 3} - \frac{1}{|x| + 2}\right| \leq \frac{1}{x^2 + 3} + \frac{1}{|x| + 2} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

67. Demuestre que (véase el problema 66)

$$\left|\frac{x - 2}{x^2 + 9}\right| \leq \frac{|x| + 2}{9}$$

68. Demuestre que

$$|x| \leq 2 \Rightarrow \left|\frac{x^2 + 2x + 7}{x^2 + 1}\right| \leq 15$$